

Тема: Правила знаходження первісних. Таблиця первісних

Мета:

- *Навчальна:* розглянути та довести правила знаходження первісних, навчити використовувати правила для розв'язування типових завдань;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити первісні за допомогою правил знаходження первісних;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Що ми називаємо диференціюванням функції?
- Що ми називаємо інтегруванням функції?
- Сформулюйте означення первісної функції
- Сформулюйте основну властивість первісної
- Що ми називаємо невизначеним інтегралом?
- Пригадаємо правила обчислення похідних

$(f(x) + g(x))' =$	$f'(x) + g'(x)$
$(fg)' =$	$f'g + g'f$
$(kf(x))' =$	$kf'(x)$
$(f(x) - g(x))' =$	$f'(x) - g'(x)$



$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$	$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
-------------------------------------	--

III. Вивчення нового матеріалу

- Правила знаходження первісних

Теорема

Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I , то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.

Можливий запис: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій)

- Теорему можна поширити на будь-яку кількість доданків (так як похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює сумі похідних доданків)

Доведення:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I \\ F'(x) = f(x) \\ G'(x) = g(x) \end{array} \right| \xrightarrow{(\forall x \in I)} (F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

Тобто функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.

Доведено.

*Аналогічно можна довести:

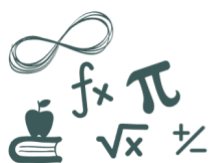
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C$$

Теорема

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k – деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.

Можливий запис: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C$

(Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла)



Теорема (про похідну функції $y = f(kx + b)$)

Похідна функції $y = f(kx + b)$ обчислюється за формулою:

$$(f(kx + b))' = kf'(kx + b)$$

**Так як доведення цієї теореми досить громіздке, її недоцільно доводити на цьому уроці.*

Для кращого засвоєння теореми доцільно розв'язати наступні приклади:

➤ Знайдіть похідну функції

$$\begin{array}{l|l} y = (x - 4)^7 & y' = 1 \cdot 7 \cdot (x - 4)^{7-1} = 7(x - 4)^6 \\ y = \cos\left(7x + \frac{\pi}{9}\right) & y' = -7 \sin\left(7x + \frac{\pi}{9}\right) \\ y = (7x - 3)^{-4} & y' = 7 \cdot (-4) \cdot (7x - 3)^{-5} = -\frac{28}{(7x - 3)^5} \end{array}$$

Теорема

Якщо $F(x)$ - первісна для $f(x)$, а k і b – деякі сталі, причому $k \neq 0$, тоді $\frac{1}{k}F(kx + b)$ - первісна для функції $f(kx + b)$

$$\text{Можливий запис: } \int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$$

Доведення:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} F'(x) = f(x) \\ (f(kx + b))' = kf'(kx + b) \end{array} \right| \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\frac{1}{k}F(kx + b) \right)' = \frac{1}{k}(F(kx + b))' = \frac{1}{k} \cdot k \cdot F'(kx + b) = f(kx + b) \end{aligned}$$

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:

- 1) $f(x) = 4 - 2x$
- 2) $f(x) = 5 \sin x + \cos x$
- 3) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на проміжку $(0; +\infty)$
- 4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$ на проміжку $(0; +\infty)$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(x) = 5 \sin x + \cos x \\ & F(x) = -5 \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$



2) $f(x) = 4 - 2x$

$$F(x) = 4x - \frac{2x^2}{2} + C = 4x - x^2 + C$$

3) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на проміжку $(0; +\infty)$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + x^3$$

$$F(x) = 4 \cdot 2\sqrt{x} + \frac{x^4}{4} + C = 8\sqrt{x} + \frac{x^4}{4} + C$$

4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$ на проміжку $(0; +\infty)$

$$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{4x^4}\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{2x^4} + C$$

№2

Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F , яка задовольняє дану умову:

1) $f(x) = 1 - 2x, I = (-\infty; +\infty), F(3) = 2$

2) $f(x) = 3x^2 - 4x, I = (-\infty; +\infty), F(1) = 4$

Розв'язок:

1) $f(x) = 1 - 2x, I = (-\infty; +\infty), F(3) = 2$

$$F(x) = x - \frac{2x^2}{2} + C = x - x^2 + C$$

$$2 = 3 - 3^2 + C$$

$$C = 2 + 6 = 8$$

Відповідь: $F(x) = x - x^2 + 8$

2) $f(x) = 3x^2 - 4x, I = (-\infty; +\infty), F(1) = 4$

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} = x^3 - 2x^2 + C$$

$$4 = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + C$$

$$C = 4 + 1 = 5$$

Відповідь: $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$



Для функції $f(x) = 4x^3 + 4x$ знайдіть первісну F , один із нулів якої дорівнює -1 . Знайдіть решту нулів цієї первісної.

Розв'язок:

Знайдемо загальний вигляд первісної:

$$F(x) = \frac{4x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} + C = x^4 + 2x^2 + C$$

$$\text{Так як за умовою } F(-1) = 0 \Rightarrow 0 = (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^2 + C = 1 + 2 + C$$

$$\text{Отже, } C = -3 \Rightarrow F(x) = x^4 + 2x^2 - 3$$

$$F(x) = 0, \text{ якщо } x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

$$\text{Заміна: } x^2 = t$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\text{За теоремою Вієта } \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x^2 = t \\ t_1 = 1 \\ t_2 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 - \text{розв'язків немає} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$

Відповідь: другий нуль дорівнює 1 .

№4

Функції F_1 і F_2 є первісними функції $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Графік функції F_1 проходить через точку $A(1; 2)$, а функції F_2 - через точку $B(0; 5)$. Графік якої з функцій, F_1 або F_2 , розташований вище?

Розв'язок:

**Знайдемо загальний вигляд первісної $F(x)$ а потім вигляд первісних F_1 і F_2 , що проходять через задані точки та порівняємо їх.*

$$F(x) = \frac{5x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - 2x + C = x^5 - x^3 - 2x + C$$

Графік F_1 проходить через $A(1; 2)$, отже:

$$2 = 1^5 - 1^3 - 2 \cdot 1 + C$$

$$C = 2 + 2 = 4$$

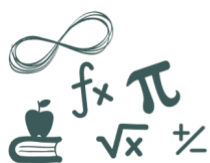
$$F_1(x) = x^5 - x^3 - 2x + 4$$

Графік F_2 проходить через $B(0; 5)$, отже:

$$5 = 0^5 - 0^3 - 2 \cdot 0 + C$$

$$C = 5$$

$$F_2(x) = x^5 - x^3 - 2x + 5$$



Так як $5 > 4 \Rightarrow$ Графік функції F_2 розташований вище.

Відповідь: F_2

№5

Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

Розв'язок:

Щоб визначити закон руху $s(t)$, якщо відомо $v(t)$ – нам необхідно знайти первісну функції $y = v(t)$, отже:

$$s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} - 3t + C = \frac{t^3}{3} + t^2 - 3t + C$$

Так як в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат, то можемо знайти сталу C :

$$s(0) = \frac{0^3}{3} + 0^2 - 3 \cdot 0 + C$$
$$C = 0$$

Відповідь: $s(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 3t$

V. Підсумок уроку

- Сформулюйте теорему про інтеграл від суми функцій
- Чи можна виносити сталий множник за знак невизначеного інтеграла?
- Продовжте запис:

$$\int (f(x) - g(x))dx = \left| \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C \right.$$
$$\int f(kx + b)dx = \left| \frac{1}{k}F(kx + b) + C \right.$$

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §2 (ст.54-55)

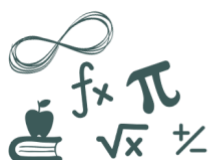
Виконати № 10.2 (1,3,5); № 10.4 (1,2); №10.6;
№10.8; №10.10, вивчити таблицю первісних

Мерзляк А.Г.

Опрацювати §9

Виконати № 9.2; 9.4; 9.8; 9.10; 9.14; 9.16; 9.24

Істер О.С.



Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

Рівень стандарту



вивчити таблицю первісних

Опрацювати §6 (ст.77)

Виконати № 6.3; 6.4; 6.9 (1,3); №6.10 (1,3)

вивчити таблицю первісних

Нелін Є.П.

Опрацювати §5 (ст.46)

Виконати № 210; 217; 222; 225

вивчити таблицю первісних

Бевз Г.П.